第 22 卷第 4 期
2004 年 12 月
徐州师范大学学报(自然科学版)
J. of Xuzhou Normal Univ. (Natural Science Edition)
Vol. 22, No. 4
Dec., 2004

关于常微分方程中奇解与包络的注记

王广瓦
(徐州师范大学 数学系,江苏 徐州 221116)

摘要:给出了两种常微分方程教材中关于奇解与包络关系结论的反例.

关键词:常微分方程;奇解;包络;反例
中图分类号:O175　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007-6573(2004)04-0062-02

奇解是常微分方程中一个非常重要的概念,包络是几何中一个非常重要的概念,由于二者在几何意义上的相通性,很多常微分方程教材在介绍奇解时,往往同时介绍包络,并从包络的角度给出一种求奇解的方法[1~5].但注意到,一般来讲,常微分方程中的奇解并不能与几何中的包络等同起来,所以,常微分方程的教材往往对包络的概念进行技术处理后再重新给出,以形成自己教材中相对独立的一个理论体系.本文将指出,文献[1,2]的理论体系分别存在着自相矛盾的问题.

1　关于文献[1]

定义 1[1]　设给定单参数曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$,其中 c 是参数,$\Phi(x,y,c)$ 是连续可微函数.该曲线族的包络是指这样的曲线:它本身并不包含在曲线族中,但对这曲线的每一点,有曲线族中的一条曲线和它在这点相切.

定义 2[1]　微分方程的一个解称为奇解,如果在这个解的每一点上还有方程的另外一个解存在,也就是说奇解是这样的一个解,在它上面的每一点唯一性都不成立.或者说,奇解对应的曲线上每一点至少有方程的两条积分曲线通过.

在上述定义的基础上,文献[1]讨论了奇解与包络之间的关系:

结论 1[1]　一阶微分方程通解的包络(如果它存在的话)一定是奇解;反之,微分方程的奇解(如存在的话)也是微分方程通解的包络.

下面给出结论 1 的一个反例.

例 1[3]　$y'^3-4xyy'+8y^2=0$.

这是一个一阶隐方程,利用微分法易求得其通解为 $y=c(x-c)^2$,其中 c 为任意常数,特解为 $y=\frac{4}{27}x^3$.仅仅考虑 $y=0$ 这个解.根据定义 1 和定义 2,易验证 $y=0$ 是奇解,但不是通解的包络.

2　关于文献[2]

定义 3[2]　设给定单参数曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$,其中 c 是参数.该曲线族的包络是指这样的曲线,它与曲线族中的每一曲线切于一点或几点,而且它全由此类切点所组成(即过这曲线上的每一点,有曲线族的一条和它在这点相切).

定义 4[2]　若有微分方程的某个解,在它所对应的积分曲线上每点处,解的唯一性都被破坏,则称此解为微分方程的奇解.

在上述定义的基础上,文献[2]也给出了奇解与包络之间的关系:

结论 2[2]　微分方程的奇解就是通解曲线族的包络.

收稿日期:2004-06-06
作者简介:王广瓦(1975—),男,江苏沛县人,讲师,硕士,主要从事应用微分方程的研究.

以下也给出结论 2 的一个反例.

例 2　$2y^2y'^2+2xyy'+y^2+x^2-1=0$.

易求得这个一阶隐方程的通解为$(x-c)^2+y^2=1-c^2$，其中 $c\in(-1,1)$，特解为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. 考虑 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 这个解. 根据定义 3 和定义 4，易验证 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 是奇解，但不是通解的包络(通解中的曲线当 $c>\frac{1}{2}$时并不与该特解相切).

注　实际上，借用分析法可构造出很多类似例 1 和例 2 的反例.

参考文献：

[1] 王高雄，周之铭，朱思铭，等. 常微分方程[M]. 第 2 版. 北京：高等教育出版社，1983. 93－97.
[2] 高素志，马遵路，曾昭著，等. 常微分方程[M]. 北京：北京师范大学出版社，1988. 92－98.
[3] 东北师范大学数学系微分方程教研室. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社，1982. 61－67.
[4] 丁同仁，李承治. 常微分方程教程[M]. 北京：高等教育出版社，1991. 94－113.
[5] 都长清，焦宝聪，焦炳照. 常微分方程[M]. 北京：北京师范学院出版社，1993. 130－138.

Two Notes on Singular Solution and Envelope of Ordinary Differential Equation

WANG Guang-wa
(Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou, Jiangsu, 221116, China)

Abstract: In this paper, some counter examples to the conclusions of singular solution and envelope in two textbooks of ordinary differential equation are given.

Key words: ordinary differential equation; singular solution; envelope; counter example

---

(上接第 17 页)

参考文献：

[1] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann Statist, 1983, 11(1): 286.
[2] 胡舒合，朱春华. 误差为线性过程时回归模型估计的均方相合性[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2000，24(3)：18.
[3] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京：科学出版社，1997. 355.
[4] 苏淳，赵林城，王岳宝. NA 序列的矩不等式与弱收敛[J]. 中国科学(A)，1996，26(12)：1091.
[5] 任哲，陈明华. NA 样本下半参数回归模型估计的强相合性[J]. 高校应用数学学报(A)，2000，15(4)：467.

A Square Consistent Regression Model with Sequence of NA Error

YU Shi-hang
(Department of Mathematics, Qiqihar University, Qiqihar, Heilongjiang, 161006, China)

Abstract: As the error is a sequence of NA for the nonlinear regression model $Y_{ni}=g(x_{ni})+\varepsilon_{ni}$, $1\leqslant i\leqslant n$, and the linear regression model $y_i=x_{i1}\beta_1+\cdots+x_{ip}\beta_p+\varepsilon_i$, $i=1,2,\cdots,n$, the square consistency of a class of estimators is obtained.

Key words: regression model; sequence of NA; square consistency